CONCOURS DE RECRUTEMENT DES PROFESSEURS DE LYCEE PROFESSIONNEL AGRICOLE

CONCOURS D'ACCES à la 4ème Catégorie des emplois de professeurs des établissements d'enseignement agricole privés

SESSION 2014

Concours : **EXTERNE**
Section : **MATHEMATIQUES – PHYSIQUE CHIMIE**

EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE N°1

Culture Disciplinaire

(Coefficient : 2 – Durée : 5 heures)

Matériel(s) et documents(s) autorisé(s) : Calculatrice à fonctionnement autonome autorisée

L'usage de tout document et tout autre appareil électronique est interdit.

SUJET : MATHEMATIQUES

Le sujet comporte 7 pages

Exercice 1

Préliminaires

1. On considère l'équation (E) : $x^2 - x - 1 = 0$.
   a. Résoudre (E). On notera ϕ et ψ les solutions de cette équation telles que $\psi < \phi$.

      Le nombre ϕ est appelé « nombre d'or ».

   b. Démontrer que l'on a :

$$(i)\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \qquad (ii)\ \psi = 1 + \frac{1}{\psi} \qquad (iii)\psi = -\frac{1}{\phi}$$

2. On considère la suite (u_n), appelée « suite de Fibonacci », définie par :

   $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

   a. Déterminer les 10 premiers termes de la suite (u_n).

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in \mathbb{N}$.

   c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   d. Prouver que la suite (u_n) n'est pas majorée (on pourra raisonner par l'absurde).

   e. En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Les trois parties suivantes sont indépendantes

Partie A : Etude de la suite de Fibonacci

1. On considère F l'ensemble des suites de réels (w_n) vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$$

   a. Soient deux suites (a_n) et (b_n) appartenant à l'ensemble F.

      Montrer que si $a_0 = b_0$ et $a_1 = b_1$, alors pour tout entier naturel n , $a_n = b_n$.

   b. Montrer que les suites (ϕ^n) et (ψ^n) appartiennent à F.

   c. Montrer que, pour tout couple de réels (λ, μ), la suite $(\lambda\phi^n + \mu\psi^n)$ est un élément de F.

   d. Soient deux réels α et β arbitrairement fixés.

      Montrer que le système (S) suivant admet une solution unique :

$$(S)\begin{cases} \lambda + \mu = \alpha \\ \lambda\phi + \mu\psi = \beta \end{cases}$$

   e. Justifier alors que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \psi^n)$$

f. En déduire que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \phi$$

2. En utilisant la relation $\psi = -\frac{1}{\phi}$, démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} < \phi < \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}$$

3. Déduire de la double inégalité précédente l'existence de trois entiers naturels p_1, p_2 et p_3 non nuls tels que l'intervalle $I = \left[\frac{p_1}{p_2}, \frac{p_2}{p_3}\right]$ soit de longueur inférieure à 10^{-3} et contienne ϕ.

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables
U ; V ; W ; K ; N : entiers naturels
Traitement
Affecter 0 à U
Affecter 1 à V
Saisir un entier naturel N supérieur ou égal à 2
Pour K allant de 1 à $N-1$
Affecter $U+V$ à W
Affecter V à U
Affecter W à V
Fin Pour
Afficher U et V.

a. Quel est l'objectif de cet algorithme ?

b. Modifier l'algorithme afin de déterminer une valeur approchée de ϕ à 5.10^{-4} près.

Partie B: Rectangle et triangle d'or

Dans cette partie, le candidat est invité à construire les figures sur sa copie.

1. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère deux rectangles ABCD et BEFG tels que :

AB = FE = b et BC = BE = a et C ∈ [BG] et B ∈ [AE].

On pose $r = \frac{b}{a}$.

a. Démontrer que les points A, C et F sont alignés si et seulement si $r = 1 + \frac{1}{r}$.

b. En déduire que les points A, C et F sont alignés si et seulement si $\frac{b}{a} = \phi$.

Pour les deux questions suivantes, on appelle ***rectangle d'or****, un rectangle non aplati dont le rapport entre sa longueur b et sa largeur a vérifie la relation* $\frac{b}{a} = \phi$.

2. Soit ABCD un rectangle d'or de longueur AB = b et de sens direct et soit DCJK un carré de sens direct.

   Démontrer que ABJK est aussi un rectangle d'or.

3. Soit ABCD un carré. Soit I le milieu de [AB].

   On considère le cercle (Ω) de centre I et de rayon IC. Soit E l'intersection du cercle (Ω) et de la demi-droite [AB). On considère le point F, tel que AEFD soit un rectangle.

   a. Démontrer que le rectangle AEFD est un rectangle d'or.

   b. Démontrer que les droites (AF) et (EC) sont perpendiculaires.

*On appelle **triangle d'or** un triangle non aplati qui possède deux côtés dont le rapport des longueurs est égal à ϕ.*

4. On considère un triangle d'or ABC, rectangle en A, tel que AB = ϕ.

   Déterminer toutes les valeurs possibles pour AC.

5. On considère un triangle isocèle ABC en A tel qu'on ait $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{5}$.

   a. Démontrer l'égalité : $CB^2 = CA^2 + AB^2 - 2AB.AC.\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

   b. Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, en déduire que :

   $$\left(\frac{CA}{CB}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

   c. Démontrer que le triangle ABC est un triangle d'or.

6. On note $\rho = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

   a. Démontrer que :

   $$\rho^5 = 1 \qquad \text{et} \qquad 1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 = 0$$

   b. En déduire que $\rho + \frac{1}{\rho}$ est solution de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

   c. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, puis justifier que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Partie C : Probabilités

On lance 5 fois de suite une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir pile soit égale à p avec $0 < p < 1$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 piles ?
2. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X, notée E(X).
3. On s'intéresse à la première apparition de deux piles consécutivement.

   On définit la variable aléatoire Y donnant le premier rang pour lequel on obtient deux piles consécutivement. S'il n'apparaît jamais deux piles consécutivement, Y prend la valeur 0.

Ainsi pour le tirage (P, F, P, P, F), Y prend la valeur 3, pour le tirage (F, P, F, F, P), Y prend la valeur 0 et pour le tirage (F, P, P, P, F), Y prend la valeur 2.

Déterminer les probabilités $P(Y=1)$, $P(Y=2)$ et $P(Y=3)$.

4. Cette fois, on lance la même pièce une infinité de fois.

On définit toujours la variable Y donnant le premier rang pour lequel on obtient deux piles consécutivement. L'événement $(Y=0)$ correspond, comme précédemment, à la situation où « il n'est jamais apparu deux piles consécutivement ».

On définit pour tout entier naturel $k \geq 2$, l'événement suivant :

(C_k) : « Au cours des k premiers lancers, il n'est jamais apparu deux piles consécutivement ».

a. Déterminer la probabilité $P(C_2)$ de l'événement C_2.

b. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a la relation suivante :

$$P(Y=n+2) = p^2qP(C_n) \text{ avec } q = 1-p$$

c. Justifier que pour tout entier naturel $n \geq 4$:

$$P(C_n) = qP(C_{n-1}) + pqP(C_{n-2})$$

d. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$P(Y=n+2) = qP(Y=n+1) + pqP(Y=n)$$

e. Dans cette question, on prend $p = \frac{1}{2}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n > 0$:

$$P(Y=n) = \frac{u_n}{2^{n+1}}$$

où u_n désigne le terme général de la suite de Fibonacci.

Exercice 2

Préciser pour chacune des propositions qui suivent si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse.

Proposition 1

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Proposition 2

Une suite décroissante et à valeurs positives tend vers 0.

Proposition 3

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n - 2$ et $v_n = e^{u_n}$ pour tout entier naturel n. La suite (v_n) est convergente.

Proposition 4

Pour tout entier $n \geq 3$, $n^3 \geq 3^n$.

Proposition 5

A et B sont deux événements qui vérifient :

$$P(A) = \frac{3}{5}; P(B) \neq 0;\ P_A(B) = \frac{1}{4}; P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{1}{5}$$

Alors $P(B) = \frac{47}{100}$.

Proposition 6

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé, l'intersection des plans $P : 3x - 2y + z + 1 = 0$ et $Q : x + y + 2z + 2 = 0$ est une droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -1 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$

Proposition 7

Soit la fonction $F : x \mapsto \int_0^x (\sin t)^2 dt$ définie sur $\mathbb{R}$.

L'équation $F(x) = 100$ admet une unique solution.

Proposition 8

Un examen propose un QCM comportant 4 questions. Pour chacune des questions, 3 réponses sont proposées et une seule est exacte. Un candidat répond au hasard. La probabilité pour qu'il donne au moins une réponse exacte vaut $\frac{16}{81}$.

Proposition 9

La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Proposition 10

La limite quand $x \to 0$ de la fonction $x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ est égale à 1.

Exercice 3

Il existe de nombreux modèles mathématiques permettant d'étudier la croissance d'une population. Le terme population est utilisé ici au sens le plus large : il peut s'agir d'une population d'humains, d'animaux, de plantes, de personnes infectées par un virus, etc. Dans ce problème, on étudie le ***modèle de Verhulst continu*** *qui permet de décrire l'accroissement de la population comme proportionnel à l'effectif mais freiné par des ressources limitées.*

On appelle $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant t de l'étude (t réel de l'intervalle $[0 ; +\infty[$). On suppose que la fonction P ainsi définie est dérivable et strictement positive sur $[0 ; +\infty[$ et qu'il existe des constantes k et M strictement positives telles que, pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$P'(t) = kP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right).$$

On note (E) l'équation différentielle : $y' = ky(1 - \frac{y}{M})$.

1) On considère la fonction Q définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $Q = \frac{1}{P}$.
   a. Démontrer que P est une solution de l'équation (E) si et seulement si Q est une solution de l'équation différentielle (E') : $y' = -ky + \frac{k}{M}$.
   b. Résoudre l'équation (E').
   c. Justifier que toute solution de l'équation (E') correspondant à une valeur initiale $y(0) > 0$ est strictement positive sur $[0 ; +\infty[$.
   d. En déduire les solutions de l'équation (E) sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ correspondant à une valeur initiale en 0 strictement positive.

2) On suppose désormais que, pour tout réel t positif, $P(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-kt}}$ où C est une constante réelle strictement supérieure à -1.
   a. Exprimer C en fonction de la population initiale P_0 (à l'instant $t = 0$) et de la constante M.
   b. De quoi dépend le signe de C ?
   c. Etudier le sens de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ selon le signe de C.
   d. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$.
   e. Décrire l'évolution de la population P.
      On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs de P_0 et M.

3) Soit T un réel strictement positif. La population moyenne sur l'intervalle de temps $[0 ; T]$ est la valeur moyenne de la fonction P sur l'intervalle $[0 ; T]$. On rappelle que la valeur moyenne μ d'une fonction continue f sur un intervalle $[a ; b]$ est donnée par $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
   a. Calculer, en fonction de M, C, k et T, la population moyenne, notée μ_T, sur l'intervalle $[0 ; T]$.
   b. Déterminer la limite de μ_T quand T tend vers $+\infty$.

4) On se place dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   a. Calculer la dérivée seconde P'' de la fonction P.
   b. Montrer que l'équation $P''(t) = 0$ admet une unique solution, notée t_0, si et seulement si $C \geq 1$.
      Déterminer t_0 en fonction de C et k.

On suppose dans les questions qui suivent que $C > 1$.

c. Démontrer que, quelles que soient les valeurs des constantes strictement positives M, C et k, le point $A_0\,(t_0, P(t_0))$ appartient à la droite d'équation $y = \frac{M}{2}$.

d. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction P, au point A_0. On note g la fonction affine correspondante.

e. Étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction P et de sa tangente au point A_0.

f. En déduire que le point A_0 est un point d'inflexion de la courbe représentant la fonction P.

FIN du sujet

****